

**TÜRKİYE MADENCILIK BİLİMSEL
VE TEKNİK 5.KONGRESİ
14 18 2/1977.dsı salonu/ankara**

GERİLİM ENERJİSİ BAZLI
ÜÇ MATEMATİK
UFALAMA MODELİ

**TMMOB
MADEN MÜHENDİSLERİ ODASI**

GEBİLİM ENERJİSİ BAZLI ÜÇ MATEMATİK UFALAMA MODELİ

Dr. Erdoğan YİĞİT *

Özet:

Ufalamada çok sözü edilen bir parametre birim yeni yüzey enerjisi, erg/cm^2 deyimidir. Bu birimin tabiatıyla katı maddelerin kırılması esnasında sarfedilen birim gerilme enerjisi, $e = \frac{\sigma^2}{2E}$, erg/cm^3 ile yakın alakası vardır.

Çekme gerilmesi altında kırıldığı kabul edilen üç matematik modelde - ilk ikisi statik yükleme ve sonuncusu dinamik yükleme - birim yeni yüzey enerjisi birim gerilme enerjisinden faydalmarak hesaplanmıştır..

Kalker, Kuartz, Kalsit ve Cam için literatürde bulunan ortalama fiziksel değerler bu üç model için bulunan formüllerde kullanılmış olup hesaplanan birim yeni yüzey enerjileri deneysel ve teorik değerlerle karşılaştırılmışlardır.

Modellerin hesaplanan değerleri deneysel değerlere oldukça yakın olup modellerin uygulamada kullanılma imkânları olduğu ortaya çıkmaktadır.

Abstract ;

A parameter of interest in the theory of comminution is the energy absorbed per unit new surface produced,

(*) Ege Üniversitesi, Maden Bölümü, Bornova - İzmir.

erg/cm². Naturally this unit has certain relation to the strain energy per unit volume of the solid at fracture. Unit new surface energy is calculated from three mathematical models: the first two »ander static loading and the third under dynamic loading assuming fracture by tensile stresses.

The average physical characteristics of Limestone, Quartz Calcite and Glass which are found in the literature are used in the formulas of these three mathematical models. The calculated values of the new surface energies from these models are compered with experimental and theoretical values.

The values from these models are reasonably close to those from experiments consequently there is the possibility for application of these models in practice.

Giriş:

Halihazırda bellibaşlı üç ufalama kanunu bulunmaktadır. Bu kanunların hepsi ilkönce Charles (1957) tarafından önerilen, sarfedilen enerji ile tane büyüklüğü arasındaki aşağıdaki bağıntıdan çıkabilir :

$$dE = - \frac{dx}{x^n}$$

burada;

E = enerji

k = bir sabite

x = tane büyüklüğü

n = diğer bir sabite

n'in değerini sırasıyla 1, 1,5 ve 2 aldığımız zaman yukarıdaki bağıntının entegrasyonundan yeni sırasıyla Kick, Bond ve Rittmger kanunlarını elde ederiz.

$$\int_0^E dE = \int_{x_1}^{x_2} -k \frac{dx}{x^n}$$

$$E = - 2,3.k.log \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \text{ Kick Kanunu}$$

$$\int_0^E de = \int_{x_1}^{x_2} -k \frac{dx}{x^{1.5}}$$

$$E = 2k. \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right) \text{ Bond Kanunu}$$

$$\int_0^E dE = \int_{x_1}^{x_2} -k \frac{dx}{x^2}$$

$$E = k. \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \text{ Rittinger Kanunu}$$

Charles'ifi genel formülünden, çıkan bütün ufalama kanunlarının teorik olarak uygulamaları çok sınırlı olup bir fiziksel kanun dayanağından yoksundurlar. Bu kanunlardan yalnızca Kick kanunu bir bakıma bir fizik kanununa - Hook kanununa - dayanıyor kabul edilebilirki o da ileri sürüldüğü şekilde esaslı bir eksikliğe sahiptir :

1. Şekil benzerliği ve yükleme çeşidinin önemi belirtilmemiştir. Bu olmayınca değişik yüklemelerin yani değişik ufalama makinaların ürünleri veya aynı tip makinaların fakat kapasiteleri farklı ufalama makinaların ürünleri arasında yanlış olarak münasebet kurulmaktadır.

2. Nihai olarak hasıl olacak kırılmanın geometrisi veya ufalama ürününün tane dağılımı hakkında bir açıklık yoktur. Bu eksiklik kırılan malzemenin nihai geometrisine göre gerekli enerjinin, tahminini imkânsız kılmaktadır. Prensip olarak enerji sarfiyatı her kırılma kademesinin tane dağılımı verildiğinde ancak hesaplanabilir.

üç Matematik ufalama Modeli :

Bir malzemenin basınç veya çekme gerilmeleri altında parçalanması veya iki parçaya ayrılması için gerekli gerilim enerjisi katı malzeme hacmi başına şu şekilde verilir : (Beke 1964)

$$e = \frac{\bar{\sigma}^2}{2E}, \text{ erg/cm}^3$$

burada;

σ = Kırılma gerilmesi (basınç veya çekme), dyn/cm²

E — Elastisite modülü, dyn/cm²

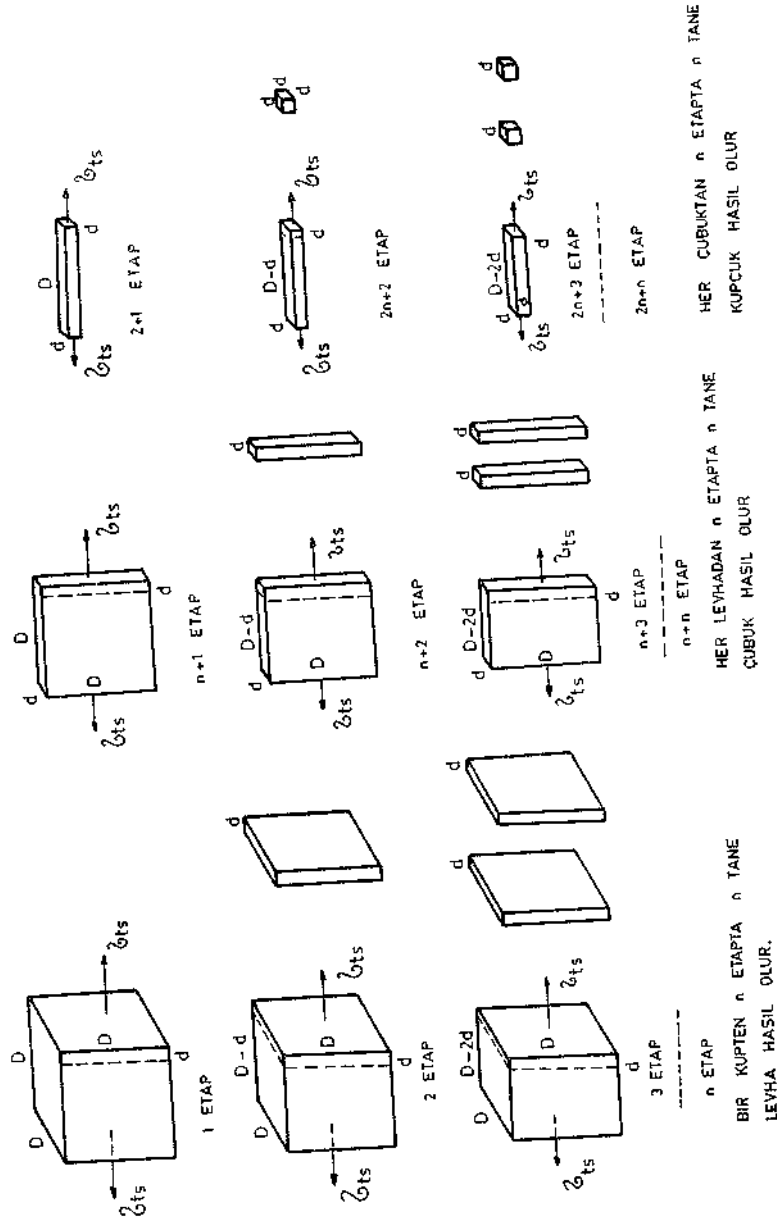
Kırılma için gerekli gerilim enerjisi malzemeye basınç veya çekme gerilmesi tatbik edilmesine göre başka başka değerler alacaktır. Bilindiği gibi taş gibi katı malzemede basınç mukavemeti çekme mukavemetinin birkaç katıdır. Bu demektir ki bir taş basınç gerilmesi altında kırılmak istenirse çok daha fazla enerjiye gerek duyulacaktır. Fakat üzerinde durulması gereken diğer bir husus basınç ve çekme gerilmeleri altında meydana gelen ufalamada malzemenin tane dağılımındaki farklılıktır. Basınç gerilmesi altında kırılan bir taş Smekal modeli (1936) denen bir kırılma düzeni gösterir ki düzende malzeme irili ufaklı bir çok parçaya bölünmüştür. Çekme gerilmesi altında kırılma halinde ise malzeme genellikle iki parçaya bölünmektedir.

Ufalamada karşılaşılan diğer bir gerilme dinamik gerilme denilen şok dalgaları altında hasıl olan yükleme çeşididir. Bu halde malzeme, yansıyan basınç dalgalarından hasıl olan çekme gerilmesine maruz kalıp kırılmaktadır. Dinamik yükleme halinde malzeme statik çekme gerilmesine nisbetle takriben iki misli bir yüke tahammül edebilmektedir. (Reinhart 1960).

Aşağıdaki üç matematik modelde kırılmanın çekme gerilmesi altında olduğu kabul edilip birim yeni yüzey enerjisi ile gerilim enerjisi arasında bir bağıntı bulmaya çalışılmıştır. Bu yapay modellerin pratikte karşılaşılan bir ufalama işlemini tam manasıyla temsil ettikleri tabii söylenemez. Matematik modellerde malzemenin ilk şekli küp olarak seçilmiş belli ufalama oranlarında küçük küpçükler elde edileceği kabul edilmiştir.

1. Levha Halinde Kırılma Modeli

Model şekil - 1 de gösterilmektedir. Bu modelde D kenarlı bir başlangıç küpünden d kenarlı küpçükler elde edilmektedir. Bu halde R ufalama oranı D/d olmaktadır. R ufalama oranını sağlamak için gerekli etap sayısı 3n olup R = n dir.



Şekil 1 Levha halinde kırılma modeli

$$e = \frac{\delta_{ts}^2}{2E}, \text{ erg/cm}^3$$

burada;

δ_{ts} = statik çekme gerilmesi

$$e_1 = e.D^3$$

$$e_2 = e.D^2.(D-d)$$

$$e_3 = e.D^2.(D-2d)$$

.....

$$e_n = e.D.(D-4n-1)d$$

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{i=1}^n e_i = e.D^2.(D + (D-d) + (D-2d) + \dots + (D-(n-1)d) \\ &= e.D^2.(R.D-d(1 + 2 + \dots + (R-1))) \\ &= e.D^2.(R.D - \frac{d(R-1)}{2} . R) \\ &= e.D^2. \frac{2R.D - d(R-1)}{2} \end{aligned}$$

Yukarıdaki toplam x eksenini boyunca sarfedilen enerji toplamıdır, d kenarlı küçükler elde etmek için işlemin x,y ve z eksenleri boyunca tekrarı gerekir.

$$E_{\text{Toplam}} = 3.e.D^3 . \frac{R+1}{2} . \text{ erg}$$

Birim hacme tekabül eden enerjiyi bulmak için de yukarıdaki ifadeyi küpün hacmi D^3 ile bölmemiz lazımdır. O halde:

$$E_T = 3.e. \frac{R+1}{2}, \text{ erg/cm}^3$$

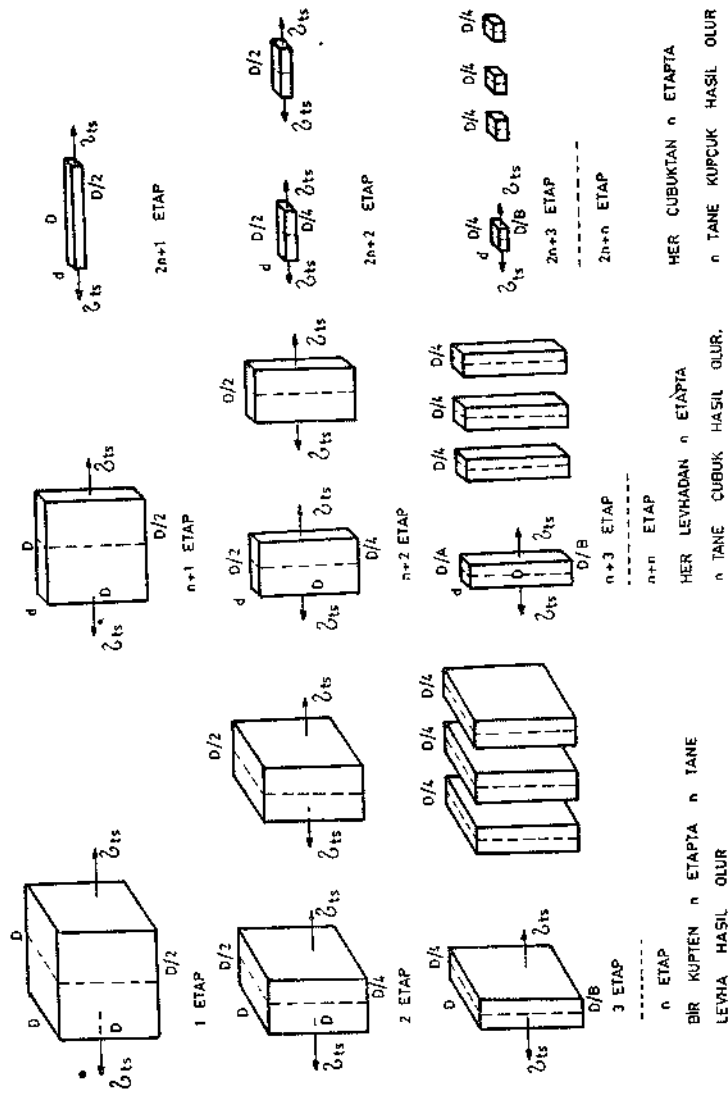
Birim yeni yüzey enerjisini bulmak için ayrıca yukarıdaki ifadeyi birim hacim başına üretilen yeni toplam yüzeye bölmeliyiz :

$$s = \frac{6(R-1)}{D}, \text{ cm}^2/\text{cm}^3$$

$$E_{\text{Yüzey}} = 3.e. \frac{R+1}{2} / \frac{6(R-1)}{D} = 1/4.e.D. \frac{R+1}{R-1}, \text{ erg/cm}^2$$

2. Yarı Yanya $Kmlm\beta$ Modeli

Bu model de şekil - 2. de gösterilmektedir. Bu modelde de



SEKIL 2 VARI VARIYA KIRILMA MODELİ

D kenarlı bir basınç küpünden 2 kenarlı küpçükler elde edildiği kabul edilmiştir. Bu halde de R ufalama oranı D/d ve bu R ufalama oranını sağlamak için gerekli etap sayısı 3n'dir. Burada $n = 3,3 \text{ Log } R + 1$ dir.

$$e = \frac{\delta_{ts}^2}{2E}, \text{ erg/cm}^3$$

$$e_1 = e.D^3$$

$$e_2 = 2.e.D^2 \text{ (D/2)}$$

$$e_3 = 4.e.D^2 \text{ (D/4)}$$

.....

$$e_n = 2^{n-1}.e.D^2 \text{ (D/2}^{n-1}\text{)}$$

$$E_x = \sum_{i=1}^n e_i = n.e.D^3 = e.D^3. (3,3 \text{ Log } R + 1)$$

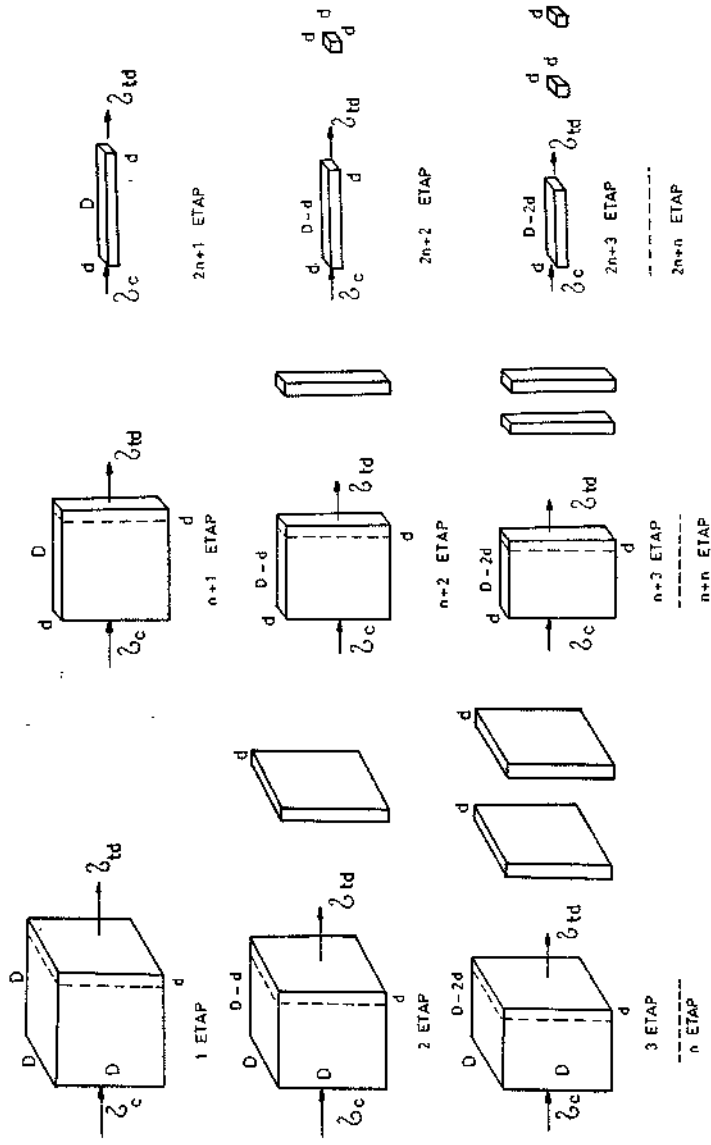
Burada da yukarki modelde olduğu gibi aynı işlemler sonucu aşağıdaki birim yeni yüzey enerjisi formülü bulunur:

$$E_{\text{yuzey}} = 1/2.e.D. \frac{3,3 \text{ Log } R + 1}{R - 1}, \text{ erg/cm}^2$$

3. BfopMnson Kinim» Modeli :

Bu model de şekil - 3, de gösterilmektedir. Bu modelde de D kenarlı bir başlangıç küpünden d kenarlı küpçükler elde edildiği kabul edilmiştir. Bu halde de R ufalama oranı D/d ve bu ufalama oranını sağlamak için gerekli etap sayısı 3n olup $R = n$ dir.

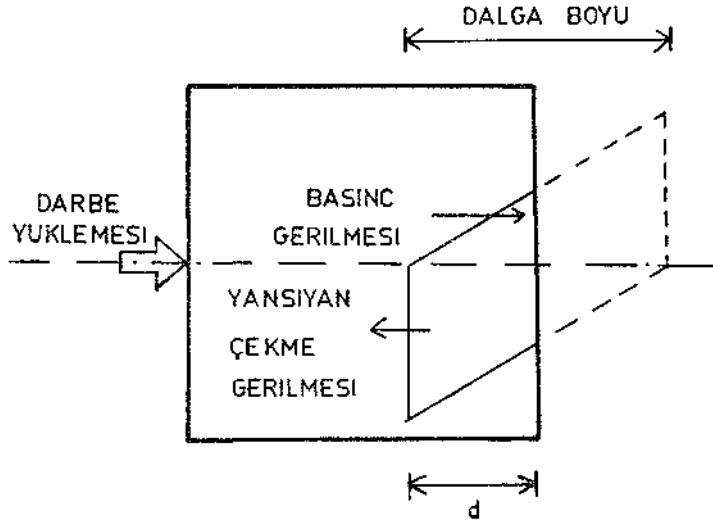
Malzeme bu modelde Hopkinson kırılması denen basınç dalgalarının bir sınırdaki yansıması neticesi hasıl olan çekme gerilmesine maruz kalarak kırılır. Hopkinson kırılma meka-



BİR KUPTEN n ETAPTA
 n TANE LEVHA HASIL OLUR.

HER LEYHADAN n ETAPTA
 n TANE ÇUBUK HASIL OLUR.

ŞEKİL 3 HOPKINSON KIRILMA MODELİ



$$d = 1/2 \text{ DALGA BOYU}$$

ŞEKİL 4 YANSIYAN ŞOK DALGASI İLE KIRILMA HOPKINSON KIRILMASI

nizması şekil - 4. de gösterilmektedir. Bu modelde şok dalgasının dalga boyunun nihai küçük boyutu ile uyum yaptığı yani $2d$ olarak seçildiği ve şok dalgasının malzeme içindeki taşınmasında şiddetinden birşey kaybetmediği yani malzeme tarafından sönmelenmediği ve malzeme sınırında tamamen çekme gerilmesi halinde yansıdığı kabul edilmiştir.

Bu dinamik halin gerilim enerjisi aşağıdaki şekilde verilir :

$$e_d = \frac{\delta_{td}^2}{2E} \text{ erg/cm}^3$$

Burada;

δ_{td} = dinamik çekme mukavemeti

dinamik çekme gerilmesinin statik çekme gerilmesinin iki katı olduğunu kabul edersek $e_d = 4e$ olur.

Bu model için de ikinci etaptan n'inci etapa kadar gerekli gerilim enerjisi aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$e_x = e_d \cdot D^2 \cdot d$$

$$e_2 = e_a \cdot i_y \cdot d$$

$$e_3 = e_d \cdot D^2 \cdot d$$

$$e_n = e_d \cdot D^2 \cdot d$$

$$E_x = \sum_{i=1}^n e_i = n \cdot e_d \cdot D^2 \cdot d = R \cdot e_d \cdot D^2 \cdot d = e_d \cdot D^3 = 4e \cdot D^3$$

Burada da yukarıki modellerde olduğu gibi aynı işlemler sonucu aşağıdaki birim yeni yüzey enerjisi formülü bulunur:

$$E_{\text{Yüzey}} = 2 \cdot e \cdot \frac{D}{R - 1}, \text{ erg/cm}^2$$

Çıkarılan Formüllerin Münakaşası :

Bu üç matematik modelden çıkarılan üç formülde de ortak unsur e.D çarpımıdır ki burada e birim gerilim enerjisi ve D başlangıç tane büyüklüğüdür. İlk statik yükleme modeli için $R \hat{=} 1$ ve birim yeni yüzey enerjisi sabit kabul edildiğinde birim gerilim enerjisinin tane büyüklüğü D'ye bağlı olduğu görülür. Hakikatte de bu ufalama uygulamalarında bir dereceye kadar geçerlidir. Malzemenin boyutu küçüldükçe kırılma için gerekli basınç veya çekme gerilmeleri büyüyerek birim gerilim enerjisinde eksponensiyel bir çoğalma meydana gelmektedir. Bunun nedeni malzeme içindeki mikroçatlaklar gibi materyal hatalarının mevcudiyetidir. Malzemenin boyutu küçüldükçe bu materyal hatalarının bulunma ihtimali devamlı olarak azalmaktadır. Böylece kırılan malzemenin mukavemeti artmakta ve daha sonrası bir ufalama işlemi için daha fazla enerji sarfıyatı gerekmektedir.

Bu üç modelin birbiri ile mukayesesinden bazı önemli noktalar ortaya çıkmaktadır :

İlk iki statik yüklemeli modellerde iki ayrı kırılma mekanizması sonucu birim yeni yüzey enerjisi ufalama oranı R'e bağlı olarak çok büyük farklılık göstermektedir.

Şok dalgaları altında kırılma modeli üçüncü modelde birim yeni yüzey enerjisi ufalama oranı ile birlikte çok değişmektedir. Bunun da sebebi kırılma anında malzemenin yalnız bir kısmının gerilim altında bulunduğudır.

Bu matematik modellerin değişen değerlerinden görüleceği üzere her çeşit gerilmelerin mevcut olduğu (basınç, çekme, makaslama gerilmeleri ve dinamik yüklemeler) ve farklı başlangıç tane büyüklükleri ve ufalama oranlarında çalışan kırıcılar, değirmenler ve diğer ufalama makinalarının hepsinde uygulanabilecek genel bir ufalama kanunu bulunması çok güçtür.

Modellerin Pratik ile Karşılaştırmaları :

Karşılaştırmalar için Kalker, Kuartz, Kalsit ve Cam seçilmiş olup aşağıdaki tabloda bunların çekme mukavemetleri ve elastisite modüllerinin ortalama değerleri ve bu değerlerden faydalanılarak hesaplanmış gerilim enerjisi (ϵ) değerleri verilmiştir :

Tablo 1 — Çeçitli taşların çekme mukavemetleri, elastisite modülleri ve birimi gerilim enerjileri.

	Kalker	Kuartz	Kalsit	Cam
Çekme mukavemeti, σ_{ts} dyn/cm ²	0,4x10 ⁹	1,2x10 ⁹	0,6x10 ⁹	5x10 ⁹
Elastisite Modülü, E dyn/cm ²	0,5x10 ¹¹	0,7x10 ¹²	0,6x10 ¹¹	0,7x10 ¹¹
$\epsilon = \frac{\sigma_{ts}^2}{2E}$, erg/cm ²	1,6x10 ³	1x10 ⁴	3x10 ³	1,8x10 ⁵

Yukarki formüllerde birim yeni yüzey enerjisinin hesaplanmasında başlangıç tane büyüklüğü ve ufalama oranının da bilinmesi gereklidir. Bunun için ufalama Hukkinin de (1962) yaptığı gibi üç grup altında mütalâa edilmiştir.

Primer Kırma : Parça büyüklüğü 100 cm.

Sekonder Kırma : Parça büyüklüğü 10 cm.

Öğütme : Parça büyüklüğü 1 cm.

Ayrıca bu üç grup için de makul bir değer olan 10 ufalama oranı kabul edilmiştir.

Kalker, Kuart'z, Kalsit ve Cam için hesaplanan birim yeni yüzey enerjileri aşağıdaki Tablolarda verilmiştir :

Tablo 2 — Yeni yüzey enerjisi : Kalker, erg/cm^2

			1. Model	2. Model	3. Model
Primer	Kırma	4,8	$4,8 \times 10^4$	$3,8 \times 10^*$	$3,5 \times 10^*$
	Sekonder Kırma		$4,8 \times 10^3$	$3,8 \times 10^3$	$3,5 \times 10^3$
	Öptme		$4,8 \times 10^2$	$3,8 \times 10^2$	$3,5 \times 10^2$

Tablo 3 — Yeni yüzey enerjisi : Kuartz, erg/cm^2

			1. Model	2. Model	3. Model
Primer	Kırma		3×10^5	$2,4 \times 10^5$	$2,2 \times 10^5$
	Sekonder Kırma		3×10^4	$2,4 \times 10^4$	$2,2 \times 10^4$
	Öptme		3×10^3	$2,4 \times 10^3$	$2,2 \times 10^3$

Tablo 4 — Yeni yüzey enerjisi : Kalsit, erg/cm^2

			1. Model	2. Model	3. Model
Primer	Kırma		$9 \times 10^*$	$7,2 \times 10^*$	$6,6 \times 10^*$
	Sekonder Kırma		9×10^3	$7,2 \times 10^3$	$6,6 \times 10^3$
	Öptme		9×10^2	$7,2 \times 10^2$	$6,6 \times 10^2$

Tablo 5 — Yeni yüzey enerjisi : Camı, erg/cm^2

			1. Model	2. Model	3. Model
Primer	Kırma		$5,4 \times 10^*$	$4,3 \times 10^*$	$4 \times 10^*$
	Sekonder Kırma	5,4	$5,4 \times 10^5$	$4,3 \times 10^5$	4×10^5
	Öptme		$5,4 \times 10^*$	$4,3 \times 10^*$	$4 \times 10^*$

Yukarıki tablolardan görüldüğü üzere yeni yüzey enerjileri başlangıç parça büyüklüğüne bağlı olarak değişmektedir. Bu durum ilk bakışta deneysel bulgulara aykırı görünmektedir. Gerçekten bu üç ufalama grubu (Primer kırma, sekonder kırma ve öğütme) için aynı çekme gerilmesi hesaplamalarda kullanılmıştır. Hakikatte bu malzemelerin, çekme mukavemetleri genellikle takriben 10 cm'lik numuneler kullanılarak elde edilmiştir. Yukarıda da evvelce işaret edildiği üzere parça büyüklüğü küçüldükçe mikroçatlaklar gibi malzeme hatalarının mevcudiyeti devamlı olarak azalmaktadır. Böylece malzeme parça büyüklüğü küçüldükçe daha fazla dayanıklılık kazanmaktadır.

Bu durum Rumpfın (1962) cam kürecekler üzerinde yaptığı deneylerde açıkça görülmektedir. (Tablo - 6).

Tablo 8 — Camın basınç mukavemetinin değişimi

Parça büyüklüğü, mikron	38	95	270
Basınç mukavemeti dyn/cm ²	1,1 x10 ¹¹	8,7x10 ⁸	5,3 x10 ⁸

Yukardaki sebeplerden ötürü çekme mukavemetini tâ-yin için yapılan deneylerde kullanılan numune boyları ile uyum halinde olan sekonder kırmaaya ait değerlerin deneysel değerlerle karşılaştırılmaları mümkündür.

Tablo 7 de sekonder kırma için bulunan değerlerin ortalamaları ve bazı deneysel ve teorik değerler toplu olarak görülmektedir. (Guillot, 1960).

Tablo 7'den görüldüğü üzere matematik modellerin sekonder kırma için bulunan ortalama değerleri deneysel değerlere oldukça yakındır. Teorik değerlerle ise aradaki farklar büyük olup bunun esas nedeni aşağıdadır :

Ufalamada sarfedilen enerjinin hepsinin yeni yüzey enerjisi halinde dönüştüğü kabul edilir ki bu pratikteki uygulamalar için geçerli değildir. Gerilim enerjisinin esas kısmı ısı olarak sarfedilir ve katılacak malzeme ve kırma makinalarının çalışan kısımlarında deformasyon enerjisi olarak absorbe edilir.

Tablo 7 — Yeni yüzey enerjisi, erg/cm²

Mineral	DeneySEL MetODLAR					Teorik	Sekonder Kırma % Modelin Ortalaması
	Kalorimetrik Scheffinger	Gross ve Zimmerley	Piret	Rnmpf ve Scafanert			
Kuartz	1x10 ⁵	5,6x10*	8,9x10»	—	920 Edser	2,5x10*	
Kalsit	3,2x10*	1,3x10*	6,9x10*	—	1200	7,6x10'	
Kalker	—	—	—	9x10*	520 Martin	4.0x10 ⁵	
Cam	—	—	—	—	Griffith	4,6 x10 ⁵	

Sonuç :

Üç matematik modelin hesaplanan yeni yüzey enerjisinin sayısal değerleri deneysel olarak bulunan değerlere oldukça yakındır. Kırılma olayı her ne kadar çok fazla basitleştirilmişle de sonuç olarak çıkan formüller çekme mukavemeti ve elastisite modülüne dayandığından modellerin fiziksel dayanağı oldukça kuvvetlidir.

Bu modellerden çıkan formüller bazı modifikasyonlardan sonra ufalama uygulamalarında faydalı olabileceklerdir.

REFERANSLAR :

- BEKE B, 1964 : Principles of Comminution. Publishing House of Hungarian Academy of Sciences.
- CHARLES R., 1957: Energy-Size Reductionships in Comminution. Min Engng. vol. 9.
- GRIFITH A. A., 1921 : The Phenomena of Rupture and Flows in Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 221.
- GROSS I., and ZIMMERLY R., 1930 : Correlation between the Surface Area Produced and Werk Done in Tube Mills Grinding of Quartz Sand. Trans. A.I.V.I.M.E., 87.
- GUILLOT R., 1960 : Le Probleme du Broyage et son Evolution. Editions Eyrolles, Paris.
- HOPKINSON B. A., 1921 : A Method of Measuring the Pressure in the detonating of Hing Explosives or by the Impact of Bullets. The Scientific Papers of B. Hopkinson, University Press, Cambridge.
- HUKKÎ R. T., 1962 : Trans. A.I.M.E.
- MARTIN G., 1924 : Researches on the Theory of Fine Grinding. Trans. Ceram. Soc.
- PÎRET L., 1953 : Fundamental Aspects of Grinding. Chem Engreg. Prog. vol. 49.
- REINHAT J.S., 1960: The Role of Stresswave in the Comminution Brittle Roclike Materials. International Symposium on Stress Wave Proagation Materials. Int. Rubl. Inc., Newyork.
- RUMPF H. and SCHONERT K., 1962 : Versuche zur Zerkleinerung von Einzelteilchen zwischen zwei Flächen : 1. European Symposium on Comminution.
- SMEKAL A., 1936: Bruchtheorie Spröder Körper. Z. Phys. vol 103.
- SHELLINGER K. and LALKELA R. D., 1951 : A Calorimetric Method for Studying Grinding in a Thumbling in a Thumbling Medium. Min. Engrg. jour, no : 6.