KEMER TAVANLI BİR TÜNELDE ELASTİK YÜZEY GERİLMELERİNİN HESAPLANMASI

CALCULATION OF ELASTIC BOUNDARY STRESSES FOI A TUNNEL HAVING AN ARCHED ROOF

Hasan GERÇEK(*)

O Z E T

Tavanı kemerli ve tabanı duz bir tünelin yüzeyinde oluşan elastik teğetsel gerilmeleri hesaplamak için analitik bir çozum geliştirilmiştir. Sunulan formül, ıkı eksenli birincil gerilme alanında açılan tünellere uygulanabilmektedir. Çozum, düzlem elastısıtenın karmaşık değişkenler yöntemi ve açıkorur gönderim tekniği kullanılarak elde edilmiştir.

A B S T R A C T

An analytical solution has been developed for calculation of elastic tangential stresses occurring on the boundary of a tunnel having an archea roof and a flat floor. The formula presented can be applied to tunnels excavated m a biaxial ın-sıtu stress field. The solu'"ion has been obtained by using the complex variable method of plane elasticity and the conformai mapping technique.

IJO^. Di . , Maaen Yuk. fcuh., *H.V.* Zonguldak Muh. Fak., ZONGULDAK

1. GİRİŞ

Kusursuz mekanik özellikteki (sürekli, türdeş ve eşyönlü) ortamlar ile ilgili düzlem elastisite kuramında, cisim kuvvetlerinin olmadığı ve sınır koşullarında yalnızca gerilmelerin tanımlandığı (birinci t^p) sınır değeri problemlerinde, gerilme dağılımını veren matematiksel bağıntılar, düzlem gerilme ve düzlem birim şekil değiştirme durumlarının her ikisi için de aynıdır (Malvern, 1969). Bu durumda, yeryüzünden yeterli derecede (örneğin, yüksekliğinin on katından fazla) bir derinlikte ve kusursuz sayılabilecek elastik bir ortamda açılan bir tünel ya da bir galeri çevresindeki gerilmelerin dağılımı problemi (aslında bu bir düzlem birim şekil değiştirme problemidir), kendi düzlemine paralel kenar yükleri altındaki ince ve sonsuz genişlikte elastik bir plaka içinde açılmış delik çevresindeki gerilmelerin dağılımı problemine (bu ise aslında bir düzlem gerilme problemidir) eşdeğer alınabilir.

Nitekim, sonsuz plaka içindeki delik çevresindeki elastik gerilmelerin dağılımını veren klasik çözümler, yeraltı açıklıklarının çevresindeki ikincil gerilmelerin dağılımını inceleyen ilk çalışmalarda kullanılmıştır (Terzaghi ve Richart, 1952; Obert ve ark., 1960). Söz konusu klasik çözümlerin çoğu, basit matematiksel bağıntılar ile tanımlanabilen açıklık geometrileri ile sınırlı kalmıştır. Daire için Kirsch'in (1898), elips için Inglis'in (1913) ve ovaloid için Greenspan'in (1944) çözümleri bu klasik çözümlerin en çok bilinen örnekleridir.

Açıklık geometrisi ve dolayısıyle açıklık yüzeyini tanımlamakta kullanılan matematiksel bağıntılar karmaşık hale geldikçe, klasik çözüm yöntemlerinin uygulanabilirliği azalmaktadır. Aslında, bu gibi yeraltı açıklıklarının gerilme çözümlemeleri, günümüzde yaygın olarak kullanılan çok güçlü sayısal yöntemler (örneğin, sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleri) ile başarıyla yapılabilmektedir.

Bu bildiride, iki eksenli genel bir birincil gerilme alanında açılan tavanı kemerli ve tabanı düz bir tünel ya da galeri yüzeyinde oluşan elastik teğetsel gerilmelerin hesaplanması için ilk defa geliştirilen bir çözüm anlatılmaktadır.

2. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Düzlem elastisitenin karmaşık geometride olan bölgeler ile ilgili bazı sınır değeri problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan bir yaklaşıma göre, söz konusu bölgenin daha basit bir şekle (örneğin, bir daireye) dönüşümü yapılmaktadır. Her ne kadar bu tür dönüşümler sonunda daha karmaşık sınır koşulları oluşmaktaysa da elde edilen yeni geometrinin basit oluşunun çözümde sağladığı kolaylıklar çok daha önemlidir (England, 1971). Muskhelishvili (1963), karmaşık değişkenler kuramını kullanarak, düzlem elastisitedeki sınır değeri problemlerinin çözümü için çok güçlü bir çözüm yöntemi geliştirmiştir. Bu yöntem, özellikle, açıkorur gönderim (konform tasvir) tekniği kullanılarak bir dairesel bölge problemine dönüştürülebilen, "sonsuz plaka içindeki delik çevresindeki gerilmelerin çözümlenmesi" problemlerinde yaygın olarak kullanılmıştır (Brock, 1958; Savin, 1961; Gerçek, 1988).

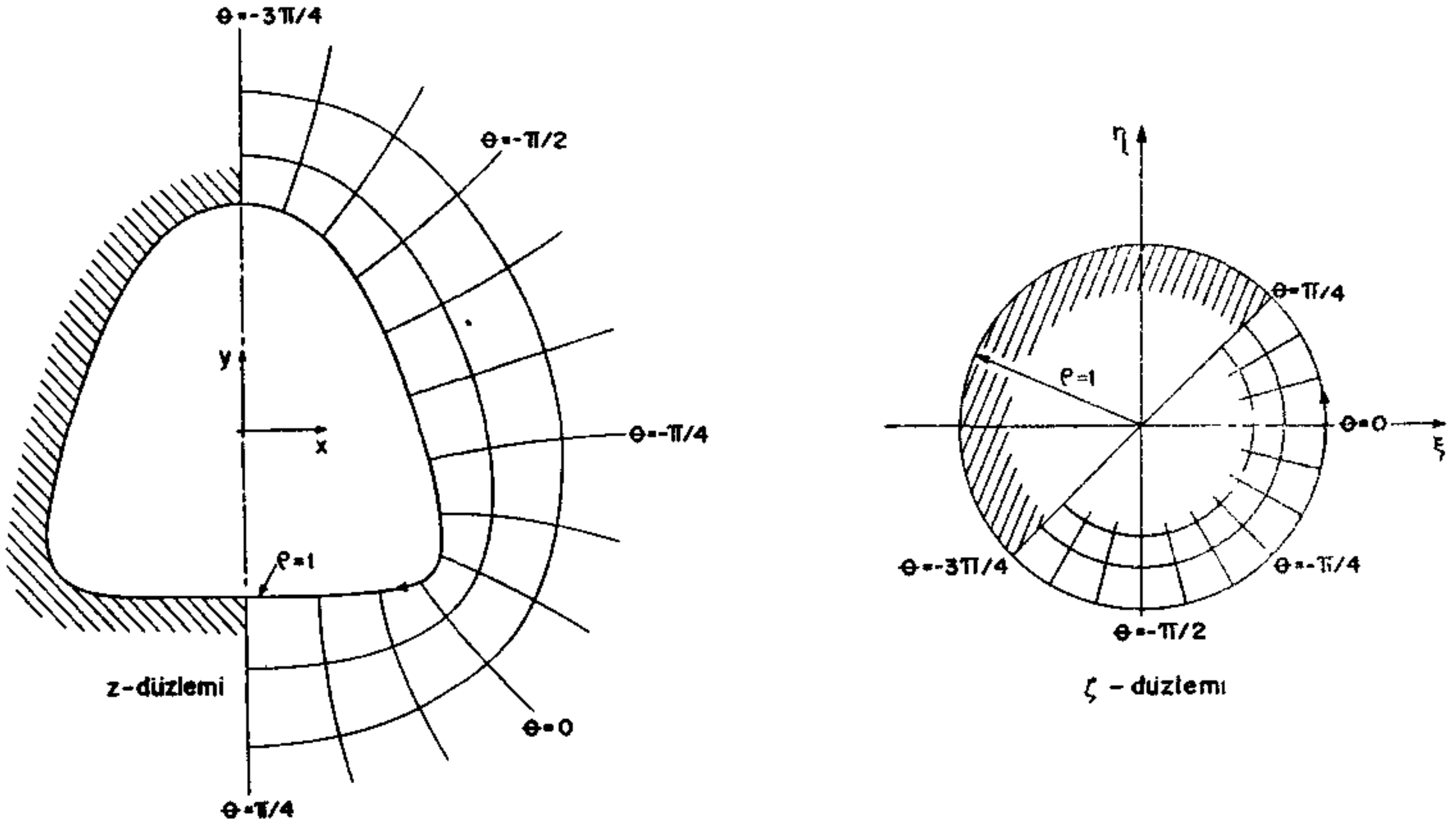
Bu tür problemlerde temel sorun, ortasından belirli bir şekli (örneğin, tünel kesiti şeklinde) olan sınırlı bir parça çıkartılmış, sonsuz genişlikteki bir düzlemin matematiksel olarak tanımlanmasıdır. Bu amaçla, karmaşık z-düzleminde (z = x + iy) kendisini kesmeyen tek bir kapalı eğri ile tanımlanan delik yüzeyini çevreleyen sonsuz bölgeyi, diğer bir karmaşık ç-düzlemindeki (ç =p*exp(ie) ya da ç - Ç + in) birim daire içine (|ç| 41) ya da dışına (|ç| £1) dönüştüren matematiksel bir z = uı(ç) dönüşüm işlevi kullanılır. Eğer z-düzlemindeki koordinat sisteminin baş noktası deliğin içinde ise, söz konusu delik yüzeyini ç-düzlemindeki birim daire üzerine (|ç| =1) ve deliğin çevresindeki alanı da, açıkorur bir biçimde, birim dairenin dışına taşıyan z = u(ç) dönüşüm işlevi,

$$z = \omega(\zeta) = \alpha_{-1}/\zeta + \text{türeyen bir işlev} = \alpha_{-1}/\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n \qquad [1]$$

şeklinde olacaktır. Burada a_{-1}, a_0, a_1,..., a_n deliğin geometrisini belirleyen gerçek ve/veya karmaşık katsayılardır. Bu açıkorur doniişüm işlevi ç(p,6)-düzlemindeki noktaların z(x,y)-düzlemindeki noktalara sürekli dönüşümünü sağlar. Öyle ki, p'nun sabit tutulması ve S'nın değiştirilmesiyle ç-düzleminde tanımlanan p yarıçaplı daire, z-düzleminde kapalı bir eğriye dönüşür. Öte yandan, Q sabit tutulurken p'nun değiştirilmesiyle ç-düzleminde elde edilen ışınsal doğru da z-düzlemindeki kapalı eğriyi dik olarak kesen başka bir eğriye dönüşür. Özetle, z = (D(Ç) dönüşüm işlevi, ç-düzlemindeki eşmerkezli daireleri ve ışınsal çizgileri, z-düzlemindeki bir eğrisel dikey koordinat ağına dönüştürür (Şekil 1).

Yukarıdaki [l] eşitliğinde, p= 1 alınıp ζ^n = exp(ine) değişimi yapılarak, gerçek ve sanal kısımlar ayrılırsa, delik (tünel) yüzeyinin parametrik denklemleri elde edilir. Gözönünde bulundurulan dönüşüm işlevi, deliği çevreleyen alanı birim daire içine taşıdığı için, ç = exp(ie) noktası |c| = 1 dairesini artı (saat dönüşünün tersi) yönde dolaşırken, buna karşılık gelen z = x + iy noktası da delik yüzeyini eksi (saat dönüşü) yönde çizer. Eğer dönüşüm birim daire dışına yapılırsa, ç- ve z-düzlemlerindeki dönüş yönleri aynıdır.

Dönüşüm işlevi bilindiği zaman, z-düzleminde verilen problemin sınır koşulları aynı anda ç-düzlemindeki uygun bir şekle dönüşür. Daha sonra hesaplanan iki karmaşık potansiyel işlevin yardımıyle problem çözülür. Sonuçta elde edilen matematiksel bağıntıların ters dönüşümü yapılarak, z-düzlemindeki asıl problemin çözümü elde edilir. Yöntemin geniş ve detaylı açıklaması birçok yayında bulunabilir (Muskhelishvili,1963; Savin, 1961; England, 1971).



Şekil 1. Basit bir kapalı eğri ile tanımlanan deliği çevreleyen sonsuz bölgenin birim daire içerisine açıkorur gönderimi.

3. DÖNÜŞÜM İŞLEVİ

Bu çalışmada kullanılan açıkorur dönüşüm işlevi,

$$z = \omega(\zeta) = \alpha_{-1}/\zeta + \sum_{n=1}^{3} \alpha_n \zeta^n \qquad [\ 2\ ]$$

şeklindedir. Bu işlevde yeralan katsayılar da aşağıda verilmiştir:

$$\alpha_{-1} = c_{-1} + id_{-1} = 1.0242\ (1-i) \qquad [3.a]$$

$$\alpha_1 = c_1 + id_1 = -0.0242\ (1+i) \qquad [3.b]$$

$$\alpha_2 = c_2 + id_2 = 0.22 \qquad [3.c]$$

$$\alpha_3 = c_3 + id_3 = 0.0484\ (1-i) \qquad [3.d]$$

Açıklık yüzeyini tanımlayan denklemler ise

x = cos e - sin 6+ 0.22 cos 26 + 0.0484 (sin 39 + cos 36) [4.a]

y = -1.0484 (cos 9 + sin 6) + 0.22 sin 26 + 0.0484 (sın 36 - cos 36) [4.b]

bağıntılarıyle verilmiştir. Bu bağıntılar kullanılarak elde edilen eğri ile madencilikte ve inşaat mühendisliğinde yaygın olarak kullanılan tavanı kemerli ve tabanı düz bir tünel ya da galeri kesiti tanımlanabilir. Öyle ki, tünelin genişliği (W), çok yaklaşık olarak yüksekliğine (H) eşit olup (W = H), açıklığın taban köşelerindeki eğrilik yarıçapı (r) da genişliğin yaklaşık onda biri kadardır (r = 0.1W). Açıklık yüzeyindeki herhangi bir noktanın kutupsal açısı da ″y<< dır (tan y= y/x).

4. TEĞETSEL YÜZEY GERİLMELERİ

Burada çözümü sunulan probleme göre, yüzeyi [4] eşitliğiyle tanımlanan tünel, asal bileşenleri "P" ve "k-P" olan birincil gerilme alanında açılmıştır. Öyle ki, "P" bileşeni, tünelin yatay ekseni ile saat dönüşünün tersi yönde bir "B" açısı yapan doğrultuda etkimektedir. Problemin geometrisi ve koşulları Şekil 2'de gösterilmiştir.

Açıklığın yüzeyindeki bir noktada oluşan teğetsel gerilme yığılması katsayısını veren eşitlik aşağıdadır:

$$\sigma_\theta/P = 4[(AC + BD) + k\,(EC + FD)] \,/\, (C^2 + D^2) \qquad [\ 5\ ]$$

Bu bağıntıda yeralan A'dan D'ye kadar olan terimler aşağıdaki sonlu seriler kullanılarak kolayca hesaplanabilir.

$$A = -c_{-1}/4 + \sum_{n=1}^{3} n\,[(c_n/4 + a_n)\cos(n+1)\theta - (d_n/4 + b_n)\sin(n+1)\theta] \qquad [8.a]$$

$$B = -d_{-1}/4 + \sum_{n=1}^{3} n\,[(c_n/4 + a_n)\sin(n+1)\theta + (d_n/4 + b_n)\cos(n+1)\theta] \qquad [6.b]$$

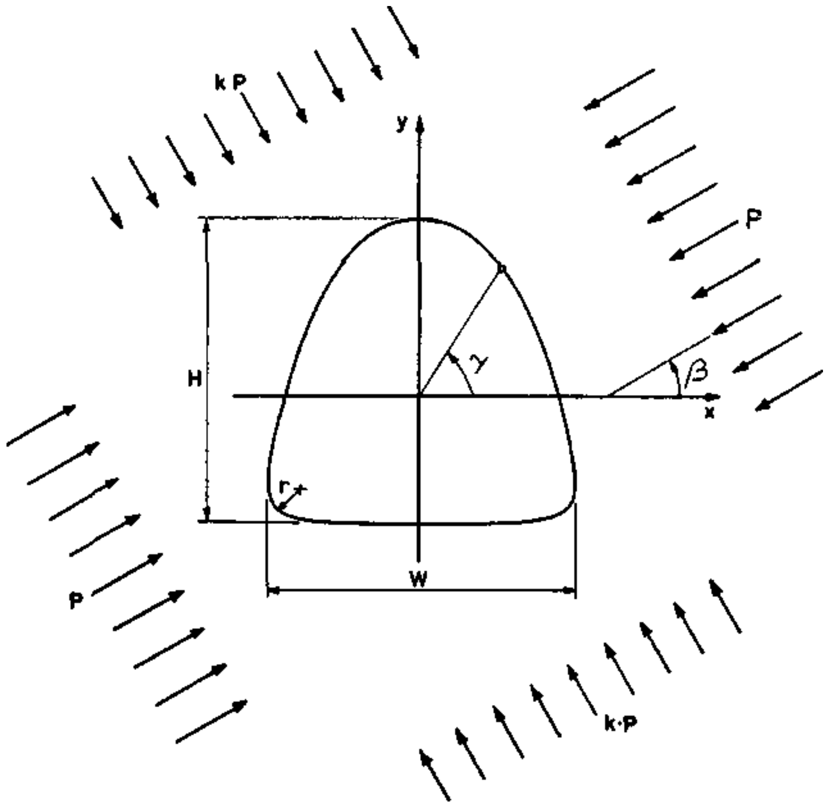
$$C = -c_{-1} + \sum_{n=1}^{3} n\,[\,c_n\cos(n+1)\theta - d_n\sin(n+1)\theta\,] \qquad [6.c]$$

$$D = -d_{-1} + \sum_{n=1}^{3} n\,[\,c_n\sin(n+1)\theta + d_n\cos(n+1)\theta\,] \qquad [6.d]$$

Bu serilerde yer alan "c_n" ve "d_n" katsayıları [2] bağıntısıyle verilen dönüşüm işlevindeki katsayılar olup, sayısal değerleri [3] bağıntıları ile verilmiştir. Ayrıca, "a_n" ve "b_n" katsayıları da n = 1 için,

$$a = (0.4879 \cos 2ß - 0.5363 \sin 2S)/(l-q^2) + 0.012l/(l+q) \qquad [7.a]$$

$$b = (0.4879 \cos 26 + 0.5363 \sin 2ß)/(l-q^2) + 0.012l/(l+q) \qquad [7.b]$$



Şekil 2. Problemin geometrisi ve koşulları.

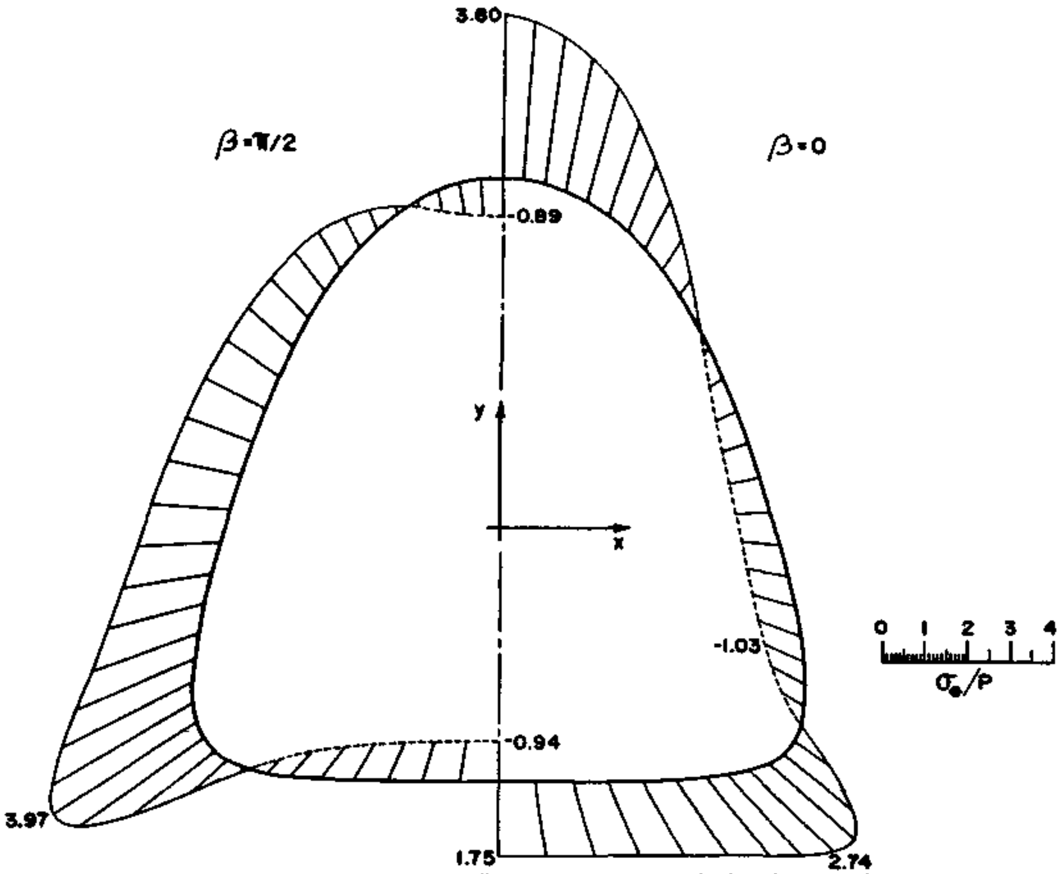
olup, burada q = 0.Ü484/1.0242 dır; n - 2 ve n = 3 için, $a_n = - c_n/2$ ve $b_n = - d_n/2$ ^PKİjndedır. Yuka^ıdak: l5] eşitliğinde ver alan E ve F terimleri, sırasıyle A ve B ••• Timlerinde "8" yerine "S ^ TI'd" alınarak bulunabilir. Dikkat ediliri-' ve F ^erimlerinin "b"yı içeren a_1 ve b_1 katsayıları dışında tum dıge> „jsırlırı sırasıyle A ve B terimlerinin aynısıdır.

5. SAYISAL UYGULAMA

Yukarıda verilen [5] bağıntısı kullanılarak, söz konusu tünelin yüzeyindeki noktalarda oluş teğetsel gerilme yığılması katsayısı (c İV), tek eksenli birincil gerilme alanı (k=0) için hesaplanmıştır. Şekil 3'de ß= 0 (yalnız yatay gerilme) ve B~ IT/2 (yalnız düşey gerilme) durumlarında, tünel yüzeyinde oluşan teğetsel gerilme yığılması katsayılarının değişimi (düşey eksene göre simetrik oldukları için) tünel kesitinin sırasıyle sağında ve solunda gösterilmiştir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada sunulan analitik bağıntı, yazara göre, tavanı kemerli ve tabanı düz bir tünel kesiti için geliştirilen ilk çözümdür. Bağıntı, yalnızca açıklık yüzeyindeki teğetsel gerilme yığılması katsayılarını verdiği için fazla karmaşık değildir ve programlanabilir hesap makinesi yardımıyle bile sayısal olarak çözülebilir. Masif, elastik kaya kütlesi içinde açılması planlanan, benzer kesitli bir tünel ya da galerinin ön tasarımı safhasında, açıklık yüzeyinde oluşması beklenen kritik gerilmelerin hesaplanmasında kullanılabilecek olan bu bağıntı, özellikle birincil gerilmelerin doğrultu ve büyüklüklerinin duraylığa etkisini araştırmada faydalı olacaktır.



Şekil 3. Yalnız yatay (sağda) ve yalnız düşey (solda) birincil gerilme durumlarında, tünel yüzeyindeki tegetsel gerilme yığılması katsayılarının değişimi.

KAYNAKLAR

BROCK, J.S., 1958; "The stresses around square holes with rounded corners," Journal of Ship Research, vol. 2, pp. 357-368.

ENGLAND, A.H., 1971; Coplex Variable Methods in Elasticity, Wiley Interscience, London.

GERÇEK, H., 1988; "Calculation of elastic boundary stresses for rectangular underground openings," Mining Science and Technology, vol. 7, pp. 173-182.

GREENSPAN, M., 1944; "Effect of a small hole on the stresses in a uniformly loaded plate," Q. J. Appl. Math., vol. 2, pp. 60-71.

INGLIS, C.E., 1913; "Stresses in a plate due to presence of cracks and sharp corners," Trans. Inst. Naval Arch., vol. 55, pp. 219-230.

KIRSCH, G., 1898; "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre," Zeit. Ver. Deut. Ing. J., vol. 42, pp. 797-807.

MALVERN, L.E., 1969; Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Parentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

MUSKHELISHVILI, **N.I.,** 1963; Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, trans, by J.R.M. Radok, Noordhoff, Groningen.

OBERT, L., DUVALL, W.I., MERRILL, R.H., 1960; Design of Underground Openings in Competent Rock, US Bureau of Mines Bulletin, No. 587.

TERZAGHI, K., RICHART, R.E., 1952; "Stresses in rock about cavities," Géotechnique, vol. 3, pp. 57-90.

SAVIN, G.N., 1961; Stress Concentration around Holes, trans, by E. Gross, Pergamon, Oxford.