

# *Finite Element Yönteminin Kaya Mekanikindeki Problemlerin Çözümünde Kullanışı*

Dr. Halil Köse (•)

## ÖZET

Esneklik (elastosite) teorilerine dayanan problemlerin çözümünde kullanılan modern ve basit bir hesap yöntemi olan Finite Element yönteminin temel esasları bu yazıda kısaca izah edilerek, kayamekaniği sahasında son yıllarda basan ile uygulanmakta olduğu örnekler verilerek gösterilmeye çalışılmıştır.

## ABSTRACT

This paper briefly deals with the basic principles of the finite element method which is simply based on the theories of elasticity and is being used successfully for the solution of the problems in the field of rock mechanics, in recent years. Apractical and simple use of this method has been shown with a few examples.

## 1. GİRİŞ

Finite Element yöntemi esneklik teorilerine dayanan problemlerin çözümünde kullanılan modern ve basit bir hesap yöntemidir. (1,2,12). Başlangıçta uçak tekniğindeki statik ve dinamik problemlerin çözümü için kullanılan Finite Element Yöntemi, bilgisayar tekniği ve kapasitesinin süratle geliştirilmesi ile daha geniş sahalarda uygulanma olanağı bulmuştur.

(x) Maden Yük. Müh., E.ü. Maden Bölümü, İZMİR.

Son yıllarda özellikle kayamekaniği dalındaki araştırmalarda, diğer model teknik yöntemlerine oranla daha basit ve kısa zamanda danada sıhhatli sonuçlar vermesi, bu yöntemin sık sık kullanılmasını sağlamıştır (4,5,7,8,0).

Finite Element yöntemi geometrik yapısı düzenli veya düzensiz, malzeme Özellikleri elastik, homojen ve izotrop kabul edilen iki boyutlu statik sistemlerde her hangi bir kuvvetin veya modelin kendi ağırlığının etkisinden dolayı meydana gelen gerilmelerin ve şekil değişikliklerinin hassas olarak saptanmasında oldukça sık kullanılmakla beraber, üç boyutlu ve büyük statik sistemlerin çözümünde Özellikle kayamekaniği ile ilgili problemlerde bilgisayar kapasitesinin yetersiz kalmasından dolayı henüz kullanılamamaktadır.

Kayaçdaki gerilim ve şekildeğişikliği bağlantısı doğrusal denklemlerin matriks teorisine göre çözümü ile hesaplandığından, kullanılacak bilgisayar kapasitesinin yüksek olması gerekmektedir.

Bu yöntemde incelenecek model, küçük ve düzenli olan (üçgen veya dörtgen şeklinde) elementlere (parçalara) bölünerek, köşe noktalarında birbirlerine bağlantılı olan bir elementağı (elementşebekesi) teşkil ettirilir. Bu elementler kendi gerilim ve deformasyonları ile birbirleri-

ni etkilerler. Bu teşkil ettirilmiş olan elementlerin tek tek durumlarından giderek bütün statik sistemin (modelin) durumu saptanır. Bu nedenle şekilleri çok düzensiz ve özellikleri değişik malzemelerden meydana gelmiş sistemler bile, basit bir şekilde hesaplanırlar.

Kaya mekaniği ile ilgili problemler genel olarak iki ayrı yolla hesaplanır.

Birincisinde, yeryüzünü ve kazı boşluğunu sınırlayan düğüm noktalarının X ve Y yönündeki hareket bileşenleri önceden verilerek, diğer arada kalan düğüm noktalarının hareketleri ile elementlerde meydana gelen gerilimler hesaplanır, ikincisinde, Elementlere kendi ağırlıkları (gravitasyon) direkt etki eden kuvvet olarak verilerek bütün kayac kesitinde meydana gelen gerilimler ve hareketler hesaplanır.

## 2. FINITE - ELEMENT YÖNTEMİNİN TEMEL ESASLARI

Elastik özelliklere sahip bir statik sistemin Finite - Element yöntemine göre hesaplanması genel olarak aşağıda sıralanan dört ana bölümde yapılır.

I. Hesaplanacak model (kayaç kesiti), önce üçgen ve dörtgenlerden meydana gelen küçük elementlere ayrılarak element ağı teşkil ettirilir v& ideal bir duruma getirilir. Yüksek gerilim meydana gelmesi beklenen bölgelerde element afi ince diğer bölgelerde iri bir şekilde teşkil ettirilir.

II. Elementlerin kinetik özellikleri diklik matrisi (rigidity matrix) yardımıyla değerlendirilir. Bilgisayar programında diklik matrisleri ve element yükü matrisleri modelin nümerik tanımından (Koordinatlar, Elastisite modülü, yoğunluk) elde edilir.

Elementlerin diklikmatrisinin teker teker birleşmesinden tüm statik sistemin diklik matrisi meydana gelir.

III. Elementlerin birleşmesinden meydana gelmiş olan statik sistemin hesap-

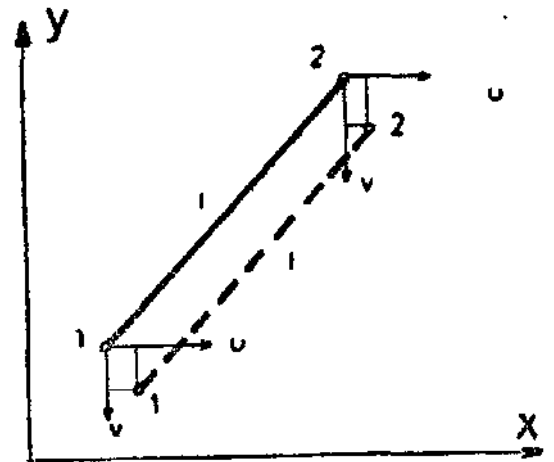
lanması, yani herhangi bir şekilde etki eden statik ve dinamik kuvvetlerden doğan gerilimlerin ve şekil değişikliklerinin alışıla gelmiş (konventional) statik yöntemlerine göre saptanması. Bu arada aşağıdaki üç koşulun yerine getirilmesi zorunluğu vardır.

- Düğüm noktalarında etki eden iç ve dış kuvvetlerin dengede olması
- Element şekil değişikliklerinin (deformasyon) element şuurlarında dayanüabilir derecede olması (aşın derecede olmaması)
- Her elementin iç kuvvetinin ve şekil değişikliğinin geometrik yapısından ve malzeme Özelliklerinden bağımlı tutulması

IV. Kaya mekaniği incelemelerinde, elde edilen düğüm noktalan hareketinden S her elementin gerilimi  $a$ , gerilim Transformasyon matrisi  $[M]$  yardımı ile hesaplanır.

$$\{ c \} = [M] \{8\}.$$

Finite - Element yönteminin temel esasları bir çubuk üzerinde basit bir şekilde kısaca açıklanırsa.



Şekil 1 — Bir 1 uzunluğundaki çubuğun herhangi bir kuvvetin etkisiyle ilhiline gelmiş durumu.

Şekil 1 de gösterilen çubuğun ucundaki iki düğüm noktası (1 ve 2) bilinmeyen herhangi bir F kuvveti etkisi ile  $V$  ve  $2'$  haline getirilsinler. X ve Y koordinatlarına paralel olan hareket bileşenlerinin değerleri 1 noktasında  $U_1$  ve  $V_x$  ve 2 noktasında ise  $U_2$  ve  $V_y$  olsun. Bu değerler sütun vektörü olarak yazıldığında

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \{ \delta \} \quad (D)$$

Çubuğun ilk ve son noktalarının bir kuvvetin etkisi nedeni ile hareket etmesinden dolayı meydana gelen şekil değişikliği (südüme veya basılma)

$$\epsilon = (U_2 - U_1) \cos \alpha + (V_2 - V_1) \sin \alpha \quad (2)$$

Bu denklem bir satır ile bir sütun vektörünün çarpımı olarak yazılırsa

$$\epsilon = \{-\cos \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha\} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Çubuğun eğimi verilen düğüm noktalarının koordinatlarından hesaplanır.

$$\tan \alpha = (y_3 - y_1) : (x_2 - x_1)$$

3 numaralı formüldeki satır vektörü yalnız çubuğun eğimine bağlı olan hareket deformasyon bağlantısını belirtir. Bu, tüm modelde yapı matrisine (struktur matrix) karşılık gelir. [D],

$$\{ \epsilon \} = [D] \{ \delta \} \quad (4)$$

Deformasyondan dolayı çubuğun içinde meydana gelen çekme veya basma gerilimi, elementin katılığı (stiffness) E.q : l (l=uzunluk, q=kesit) ve şekil değişikliği ile düz orantılı ve aynı zamanda dışardan düğüm noktasına etki eden kuvvete özdeştir. (Aksiyon=Reaksiyon)

$$F = E \quad (5)$$

Değeri ve yönü belli olan bu kuvvetin düğüm noktalarında birbirlerine bağlı olan diğer çubuklara etkisini saptamak için F kuvveti her düğüm noktasında X ve Y koordinatlarına paralel olmak üzere birleşmelerine ayrılır.

$$\begin{Bmatrix} f \\ f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \frac{E q}{l} \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ +\cos \alpha \\ +\sin \alpha \end{Bmatrix} \epsilon \quad (6)$$

Yukardaki formülde görülen trigonometrik faktör 3 numaralı formüldeki yapı vektörünün (strüktür vektör) sütun vektörüne transpose edilmiş halidir.  $\{D\}^T$  yerine 3 numaralı denklemin sağ tarafı konursa, çubuğun genel kuvvet - hareket - bağlantısı ortaya çıkar.

$$\begin{Bmatrix} f \\ f \end{Bmatrix} = \frac{E q}{l} \begin{Bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ +\cos \alpha \\ +\sin \alpha \end{Bmatrix} \{-\cos \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha\} \{ \delta \} \quad (7)$$

$$= \frac{E q}{l} [D]^T [D] \{ \delta \} \quad (8)$$

$$\frac{E q}{l} [D]^T [D] = [S] \quad (9)$$

Sekiz numaralı formül diklik matrisi [S] ile basit bir denklem haline getirilir.

$$\{ f \} = [S] \{ \delta \}$$

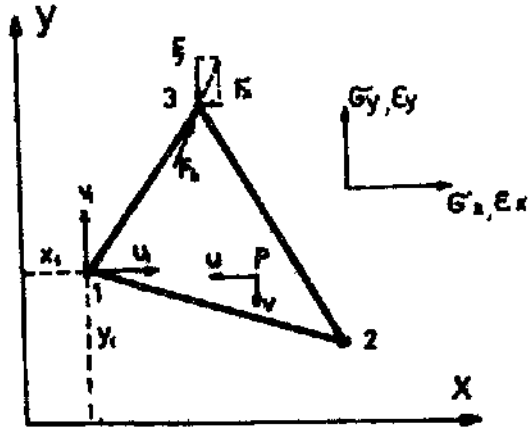
Bir çubuk için yukarıda yapılan işlemler aynı düzlem üzerinde yer alan ve ikiden fazla düğüm noktasından meydana gelen statik sistemler içinde geçerlidir, önce hareket - Deformasyon bağlantısından (Formül 4) strukturmatrix (yapı matrisi) [D] elde edilir. Dokuz numaralı denklemden [D]<sup>T</sup> [D] katılık matrisi [S] ve onun tersi [S]<sup>-1</sup> bulunur. Orada kuvvet - hareket bağlantısı elde edilir.

$$\{ \delta \} = [S]^{-1} \{ f \}$$

Şekil 2 de görülen Üçgen şeklindeki bir elementin 1, 2 ve 3 numaralı düğüm noktalarının hareketi hem düzlem içerisinde yer alan herhangi bir P (x, y) noktasının

hareketi ile, nemde elementin deformasyonu ile aynı parametre  $a_i$  ile bağlıdır, üç düğüm noktası ile birbirlerine bağlı olan elementlerin deformasyonu esnasında sınır çizgilerinde ayrılmalarını veya birbirleri üzerine katlanmalarını önlemek amacıyla element ve düğüm noktaları için polinomdan bir hareket yörüngesi şart koşulur.

Bu önkoşuldan dolayı sınır çizgileri deformasyondan sonrada doğru halinde kalırlar.



Şekil 2 — Üç numaralı düğüm noktasında F kuvveti etki eden üçgen şeklinde bir element

Koordinatları, hareketlerle  $S(u, v)$  doğrusal polinomlar formunda bağlantılı olan düğüm noktaları eğer belirsiz kuvvetlerin etkisi ile kaydırılırlarsa, element içindeki herhangi bir P noktasında durumunu aynen  $on$  numaralı denkleme göre değiştirir.

Bir numaralı düğüm noktası için

$$TJ_1 = ct_1 + 0.2X_1 + 0.3y_1 \quad (10)$$

$$V_1 = GU + (X_5X_1 + Ct_1y_1)$$

(U)

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & u & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [K] \{a\}$$

$$\begin{aligned} U &= a_1 + a_2x + a_3y \\ V &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \quad (12)$$

$U_1, V_1 = 1$  numaralı düğüm noktasının X, Y yönünde kayması.

$X_1, Y_1 = 1$  numaralı düğüm noktasının koordinatları.

$o, =$  Bir elementin kayma durumunu belirten parametre.

$$a_1 = U_0 \quad a_2 = \frac{\partial U}{\partial x} \quad a_3 = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$a_4 = V_0 \quad a_5 = \frac{\partial V}{\partial x} \quad a_6 = \frac{\partial V}{\partial y}$$

Bir element içerisindeki deformasyon (13)

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_3 + a_5 \end{Bmatrix}$$

12 numaralı denklemden parametre  $a_1$  nin yerine düğüm noktaları hareketi  $8(u, v)$  konularak 10 ile 12 numaralı denklemler «a» ye göre çözülür.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2A} [f_1 b_1 x + c_1 y] u_1 + \frac{1}{2A} [f_2 b_2 x + c_2 y] u_2 + \frac{1}{2A} [f_3 b_3 x + c_3 y] u_3 \\ v &= \frac{1}{2A} [g_1 b_1 x + c_1 y] v_1 + \frac{1}{2A} [g_2 b_2 x + c_2 y] v_2 + \frac{1}{2A} [g_3 b_3 x + c_3 y] v_3 \end{aligned} \quad (14)$$

A ... Düğüm noktalarının koordinatlarından hesaplanan element alanı

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2 \text{ v.s.}$$

13 ve 14 numaralı formüllerden (15)

$$\{E\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \{a\} = [D] \{a\}$$

Strüktür matrisi (yapı matrisi) ters koordinat matrisinden (formül 11) hesaplanır.

$$[D] = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 & \ddot{U} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{U} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{U} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{U} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{U} \end{pmatrix} \cdot [K]^{-1}$$

İki boyutlu sistemlerde bir isotrop malzemenin gerilim ve deformasyon ilişkileri aşağıda gösterildiği şekildedir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\{G\} = [C] \{\epsilon\} = [C] [D] \{\delta\} \quad (17)$$

Genel matris formülü aşağıdaki gibidir.

Gerilim ve düğüm noktası hareketi arasındaki bağlantı 15 ve 16 numaralı formüllerden transformasyon matrisi halinde elde edilir.

$$[M] = [C] [D]^*$$

Element için aranan, kuvvetlerin ve hareketlerin birbirleri arasındaki etkisi (diklik matrisi) bir çubukta olduğu gibi form değişikliğinden kaynaklanan içreaksiyon kuvvetinden bulunur. Bu kuvvet düğüm noktalarında dıştan etki eden kuvvetler (ağırlık vs.) ile dengededir.

X eksen yönünde düğüm noktalarına etki eden kuvvetler sıfırdan F değerine kadar, ve bu kuvvetlere tekabül eden uzunluk değişimi sıfırdan  $\Delta l$  değerine kadar büyürse, formdeğiştirme işi aşağıdaki formülden bulunur.

$$W = \int \sigma \epsilon dx \quad (18)$$

Elastik bölgelerde kuvvet ve yol birbirleri arasında orantılı olduklarından, x nok-

taşandaki dış formdeğiştirme işi  $Fx = FJC/8$  bölgesel kuvvet için.

$$Wd = \frac{F}{8} \int x dx = \frac{1}{2} F \delta \quad (19)$$

Yukardaki denklemde uzunluk birimi 1

kabul edilerek  $\frac{F}{1.1} = 0 \frac{\delta}{1} = e$  değeri

konursa, incelenecek noktadaki formdeğişikliği işi

$$W_{in} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \quad \text{olur.} \quad (20)$$

Tek eksenli çekme ve basma geriliminde x eksenindeki alan birimi başına düşen elementin bütün iç formdeğiştirme işi için

$$W_i = \frac{1}{2} \int \sigma \epsilon dA = \frac{1}{2} A \sigma \epsilon \quad (21)$$

19 ve 21 numaralı denklemlerde görülen dış ve iç formdeğiştirme işlerinin eşitlenmesinden

$$F\delta = A\sigma\epsilon \quad \text{elde edilir.} \quad (22)$$

Burada hayali kayma prensibi virtude verschieburs kullanılarak bir noktanın görünürdeki hareketi 5 ve aynı andaki brim deformasyonu (sünmesi) yoluyla

$$F \{\delta\} = A \{\epsilon\}^T \{G\} \quad (23)$$

15 ve 16 numaralı denklemlerde göz önüne alınarak kuvvet ve hareket bağlantısı kurulur.

$$F \{\delta\} = A \{\delta\}^T [D]^T [C] [D] \{\delta\} \quad (24)$$

Eğer {S} ve {5} için brim matrisi [E] konulursa Mr üçgen şeklindeki element için 24 numaralı denklemden kırılmazlık matrisi [S] 6.6 elde edilir.

$$[S_a] = [A][D][J]^T [C] [D]. \quad (25)$$

Elementlerin kırılmazlık matrislerinin teker teker toplanmasından modelin sistem kırılmazlık matrisi bulunur. Matrisin içerisindeki sayı brimleri düğüm noktalarına u veya v brim hareketini veren iç düğüm noktaları kuvvetlerinden meydana gelir.

İç kuvvetlerin bileşkesinin her düğüm noktasında etki eden dış kuvvetler ile dengede kalabilmesi için (bak şekil 1) sistem kırılmazlık matrisinin birim kuvvetlerinin bir faktör (belirsiz düğüm noktaları hareketi) ile çarpılması gerekir.

Bu denklem sisteminin (her düğüm noktası için iki denklem) çözümünden etki eden kuvvetin meydana getirdiği ve aranan düğüm noktaları hareketi iki formülden

$$\{5\} = [S_r] \{f\} \quad (26) \quad \{S_j\} = [H_{jj}] \{f\} \quad (27)$$

birine göre bulunur. [H], [S] matrisinin tersidir.

Hesaplanmış olan düğüm noktaları hareketinden elementlerin ortalarında meydana gelen gerilimler 15 ve 17 numaralı formüllere göre hesaplanırlar.

### 3. FİNİTE - ELEMENT YÖNTEMİNİN KULLANILIŞ ŞEKLİ

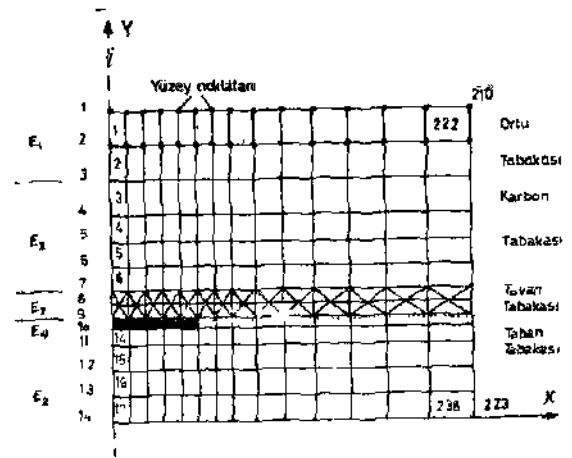
#### 3J. ELEMENT SEÇİMİ, ELEMENT AĞININ OLUŞTURULMASI VE ÖN KOŞULLARI

Elementlerin yapıları üçgen veya dörtgen şeklinde olurlar, üçgen şeklindeki elementlerle, düzensiz modellerde daha iyi element ağı oluşturulmakla beraber, dörtgen şeklindeki elementlerin kullanılması esnasında aynı modelde daha az element sayısına gereksinim duyulur. Bu nedenle element seçiminde izlenecek en optimal yol üçgen ve dörtgen şek-

lindeki elementlerin aynı modelde beraber kullanılmasıdır (Şekil 3).

Elementlerin sayıları ve boyutları genellikle incelenecek modelin niteliğine bağlıdır. Element ağı ne kadar sık seçilirse, elde edilecek değerler de o kadar hassas olur. Ancak bilgisayar tekniğinin modelde bulunan *element sayısını* sınırlaması (max 800), büyük gerilim ve deformasyon meydana gelmesi beklenen bölgelerde element ağının sık, geri kalan bölgelerde seyrek bir şekilde seçilmesini zorunlu kılar.

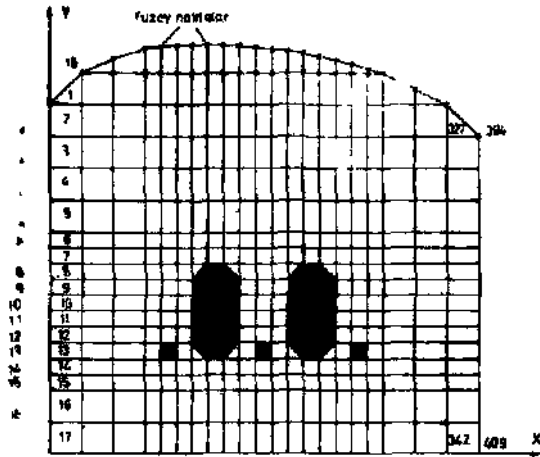
Şekil 3 de dolgu uzun ayak yöntemine göre kazanılan kömür damarının, şekil 4 de ise arakatlı kazı yöntemine göre cevheri kazanılmış iki boş odanın kesiti üzerinde kurulmuş element ağı görülmektedir.



Şekil 3 — Dolgu uzun ayak yöntemine göre kazısı yapılan bir kömür flaman kesiti için seçilen üçgen ve dörtgen şeklindeki elementlerden meydana gelmiş element ağı

Şekillerden de görüldüğü gibi büyük gerilim ve deformasyon meydana gelmesi beklenen bölgelerde (kazı boşluğuna yakın bölgelerde) element ağı sık, diğer bölgelerde seyrek seçilmiştir.

Element ağı kayaç hareketlerinin bitmesi beklenen veya hareket değerinin önceden bilindiği bölgelerde sınırlandırılmıştır.



Şekil 4 — Arafcatlı kazı yöntemine göre cevheri kazanılmış panoların kesitinde kurulan element ağı

Eğer incelenecek modeldeki hareketler Şekil 3 de görüldüğü gibi dikey eksene simetrik ise, hesaplama işleminin modelin sadece yarısını kaplaması yeterlidir. Modelin sınırında, y eksenı yönünde yer alan 1 den 14 ve 210 dan 223 e kadar olan düğüm noktalarının kot numaraları 1 dir (Tablo 1). Bu numaraya sahip olan noktalar düşey yönde hareket edebilirler fakat yatay yönde hareket edemezler. Çünkü modelin sınırlanmış olduğu yan bölgelerde doğada kayaç kütlesi yer aldığından bu yönde hareket (yatay yönde) önlenmiş olur.

Modelin taban sınırında x eksenı yönünde yer alan noktaların (14, 29,... 223) kot numaraları 3 dür. Bu noktalar gerek yatay gerek düşey yönde hareket edemezler yani sabittirler.

üst sınırda ve diğer bölgelerde bulunan noktaların kot numaraları 0 dır. Bu noktalar her yönde hareket etme olanağına sahiptirler.

Bu modelde bulunmamakla beraber, eğer bir noktanın yatay yönde hareket edebilmesi ve düşey yönde sabit kalması isteniyorsa, kot numarası olarak 2 verilir. Yukarıda açıklandığı şekilde hazırlanan element ağındaki işlemler oldukça kısaldı.

miş olur ve daha az düğüm noktası ve element sayısı ile yetiniür.

Şekil 3 deki kayaç modelindeki element ağında 223 düğüm noktası ile 238 tane element, şekil 4 dekinde ise 409 düğüm noktası ile 342 element yer almaktadır. Bilgisayara, modelin boyutları değiştirilmeye gereksinme duyulmadan, orjinal değerleri ile verilir.

### 3)2 MALZEME ÖZELLİKLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

incelenecek modelde yer alan malzemelerin özellikleri, her malzemenin elastisite modülü  $E_i$ , enine genleşme katsayısı  $\alpha$  ve yoğunluğu  $d_j$  yardımı ile yeterince karakterize edilirler.

Şekil 3 de görülen kayaç modelinin hesaplanması için aşağıda gösterilen malzeme özelliklerinin kabul edilmesi yeterlidir.

üst örtü tabakasının elastisite modülü itme için  $E_1=1000 \text{ MN/m}^2$  çekme için  $10 \text{ MN/m}^2$ , enine genleşme katsayısı  $\alpha=0,35$  yoğunluğu  $d=2,2 \text{ ton/m}^3$ , Orta, karbon tabakasının elastisite modülü  $E_2=10000$  ve  $100 \text{ MN/m}^2$ , enine genleşme katsayısı  $\alpha=0,2$  yoğunluğu  $2,5 \text{ ton/m}^3$  seçilebilir.

Kömür damarı ve dolgu tabakası içinde  $E_4=6 \text{ MN/m}^2$ ,  $\alpha=0,35$ ,  $d=2,2 \text{ ton/m}^3$  olarak almak yeterlidir.

Malzemelerin bu özellikleri Tablo 1 de görüldüğü şekilde bilgisayara verilir.

Modelde yer alan değişik malzemenin meydana gelmiş her element için (max. 12 çeşit malzeme) bilgisayara ayrı ayrı değerler verilebilir, çünkü bu değerler element katılık matrisi içerisine girerek her element için extra hesaplanır.

Hesaplanacak modelde ısı ve genleşme gibi etkenlerde varsa ısının değeri ve genleşme katsayısı Tablo 1 de görüldüğü gibi her element için ayrı ayrı bilgisayara verilir.

### 3. MODELİN HESAPLANMASINDA DİKKAT EDİLECEK HUSUSLAR

Hesaplanacak modelin kesiti Şekil 3 ve 4 de görüldüğü gibi önce elementlere ayrılarak element ağı teşkil ettirilir ve düğüm noktaları ile elementler sıra halinde numaralandırılırlar.

Finite - element yönteminin program kartları E.L. Wilson (11) tarafından geliştirilen standard forma göre hazır bir şekildedir. Her değişik modelin hesaplanmasında aynı program kartları kullanılır.

Elementlerin özelliklerini ve onları sınırlayan düğüm noktalarını karakterize eden veriler, bilgisayar kartlarına 1 numaralı tabloda görüldüğü şekilde delinecek, aşağıda gösterilen sıraya göre, program kartlarının arkasından bilgisayara verilir.

I. Program gidişi için kumanda ve kontrol kartı.

II. Her ayrı malzeme için yoğunluğu belirten kart.

III. Isı farkı, E-modül ve enine genleşme katsayısını  $p$ , belirten kart.

IV. Her düğüm noktası için, noktanın koordinatlarını ve o noktada etki eden kuvveti ve veriliyorsa, ön hareketini belirten kart.

Eğer birbirlerini izleyen düğüm noktaları arasındaki uzaklıklar eşit ise aynı doğru üzerindeki ilk ve son noktaların koordinatlarının verilmesi yeterlidir. Çünkü arada kalan diğer noktalar bilgi sayarda interpolasyon yoluyla bulunur. Ancak düğüm noktalarından birine her hangi bir kuvvet etki ediyorsa veya bu noktalardan birine bir ön hareket verilmek isteniyorsa, o zaman bu kartlarında tek tek delinmesi gerekmektedir.

V. Her element için kendini sınırlayan düğüm noktalarını ve meydana geldiği malzemenin cinsini belirten kart

Eğer elementlerin malzemesi değişmiyorsa, buradada aynı doğrultudaki ilk ve son element kartları verilerek aradaki interpolasyon yoluyla bulunur.

VI. Eğer etki eden kuvvet bir noktaya değilse bütün bir yüzeye dağılıyorsa, yüzey sınırlarını ve kuvvetin büyüklüğünü belirten kart.

Yukarıda kısaca açıklandığı şekilde programlanarak hesaplanan modelin düğüm noktalarının hareketi ve elementler içerisinde meydana gelen gerilmeler (Tablo 1 de görüldüğü gibi) bilgisayardan basılmış olarak elde edilir.

Finite element yöntemi bir kayaç kesitindeki çökme, kayma, gerilim ve şekil değişikliği bağlantısını ve aynı zamanda yer yüzünden kazı boşluğuna kadar meydana gelen bütün tabakaların hareketlerini mekaniksel kanunlara dayanarak hesaplayan ilk yöntemdir.

Kayaçta yer alan tabaka değişiklikleri değişik malzeme özellikleri (E,  $p$  ve  $d$ ) kabul edilerek karakterize edilir.

Kayaç içerisinde bulunan faylar ve başlıklar genellikle E-modülü çok düşük ve enine genleşme katsayısı büyük olan elementlerle hesaplanırlar.

Kritik gerilimi aşan yüklemelerden doğan kırılma durumları direkt olarak incelenemediğinden, değişik yollara yaklaşık olarak hesaplanır.

Bu kadar kullanışlı, basit ve gerçeğe yakın sonuçlar veren Finite element yönteminin başlıca dezavantajları, büyük programlarda (özellikle kaya mekaniği dalında) bilgisayar kapasitesinin yetersizliği nedeni ile şimdilik sadece iki boyutlu problemlerin çözümünde kullanılabilmesi ve kayaçların reoloji (akışkanlık) ve plastik özelliklerinin tam olarak göze önüne alınmamasıdır.



## KAYNAKLAR

1. Argyris, J. H., «Die Matrizenmethode der Statik», *Ingénieur - Arch.* 85. S. 174-192., 1957.
2. Clough, R. W., «The Finite Element Method in Plane Stress Analysis», *Proc. 2nd Conf. Electronic Comp, ASCE*, pp, 345 - 478, 1960.
3. King, I. P., «Finite Elements Analysis of three Dimensional Time - Dependent Stress Problems», Ph. D. Thesis, University of Calif. Berkeley., 1965.
4. Köse, H., «Berechnung der Spannungen und Verformungen in Gefrierschichtauskleidungen mit Hilfe der Finiten - Elemente Methode», Dissertation an der Technischen Universität Berlin., 1977.
5. Köse, H., «Programmierte Berechnung der Abbaueffekten auf Schicht nach dem Modell der finiten Elemente», *Glückauf For.schungsWL\** 39. II. 4. S. 141-145., 1978
6. Krause, H., «Bergbauingenieur», Springer - Verlag, Berlin, 1974
7. Krjizsrh, H., «Tiber rî'o A', ^"- idu .£ des Verfalirens eler uni <R Si urate in der Bergsoludcukî: lk», j' tt. rv. t' T M.ukscheidewesen. II. I. £. 49-65., 1975.
8. Kratzsch, H., ve Köse, H., «Modeltheoretische Berechnung der tektonischen Spannungen im tiefen Ruhrkarbon nach der Methode der finiten Elemente», *Forschungsberichte des Landes Nordrhein - Westfalen, Westdeutscher Verlag Nr. 2749 ^Fachgruppe Bergbau / Energie.*, 1978.
9. Malina, H., «Berechnung von Spannungsumlagerungen in Fels und Boden mit Hilfe der Elementea Methode», *Veröff. des Instituts für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe*, 1969.
10. Stagg, K. G., and Zienkiewicz. O. Ç., «Rock Mechanics in Earth & Rock Engineering», John Wiley and Sons London. C. 2-11-2T6., 1968.
11. Wilson, E. L., «Finite Element Analysis of T- o-Di'rîr T-ncm'i ^int ' ^urv). Pli P. Thesis, University of Calif., Berkeley., 1963.
12. Zienkiewicz, O. C., ve Chcmc, YTC., «App- lîr' \*o'i .'. The fil.i . 7 l'n^:it V-'i^od to Pr;M--u. of Ruri; I.Ietfc^mr», Pr >c. 1 st. fi - r. Tut. S" C. :--- ~'fck TI 'i, Lisbon. Vol. 1 Paoer 771, DO fcCl - 636\*, 1060.
13. Zienkiewicz, O. C., «The Finite Element Method in Strucktural and Continuum Mec- hanike», Mc Graw - Hill., 1967.